



CORRIGE DE MATHEMATIQUE ENSP YAOUNDE 2009

Niveau 1



PARTIE A

1. Limite de
- $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = 0$$

Bonne Réponse A)

2. Forme algébrique de
- Z

$$\begin{aligned} Z &= \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} = 4 \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}{\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2}(1+i)(1-i\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2}(1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})) = (\sqrt{2} + \sqrt{6}) + i(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \end{aligned}$$

Bonne Réponse C)

3. Variance de
- X

$$X \in \{0; 1; 10\}$$

$$P(X=0) = \frac{3}{6}; P(X=1) = \frac{2}{6}; P(X=10) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_0^2 x_i^2 p_i - \left(\sum_0^2 x_i p_i \right)^2 \\ &= 0 \times \frac{3}{6} + 1^2 \times \frac{2}{6} + 10^2 \times \frac{1}{6} - \left(0 \times \frac{3}{6} + 1 \times \frac{2}{6} + 10 \times \frac{1}{6} \right)^2 = 13 \end{aligned}$$

Bonne Réponse B)

4. Dérivée seconde de la fonction
- $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$
- .

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = G(x) - G(0) \text{ où } G \text{ est une primitive de } t \mapsto e^{-t^2};$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (G'(x))' = (e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$$

Bonne Réponse C)

5. Ensemble des points
- $M(Z)$
- tels que
- $\left\| \frac{Z-4i}{Z+2} \right\| = 1$

Soit dans le plan complexe $A(4i)$ et $B(-2)$ on a $\left\| \frac{Z-4i}{Z+2} \right\| = 1 \Leftrightarrow MA = MB$; M appartient à la médiatrice de $[AB]$, l'ensemble des points M est une droite.

Bonne Réponse B)

6. Forme de
- n

$$(1 + i\sqrt{3})^n = \left(\frac{1}{2^n} \right) \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = \frac{e^{in\frac{\pi}{3}}}{2^n}$$

$$(1 + i\sqrt{3})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow n = 3k, k \in \mathbb{N}$$

Bonne Réponse C)

7. Suites

$$U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n, U_0 = 1 \text{ donc } (U_n) \text{ est une suite géométrique}$$

Bonne Réponse A)8. Coordonnées du point $H(x, y, z)$

$$A(2, 4, 1); B(0, 4, -3); (\mathcal{P}): x + 2y - 3z - 1 = 0$$

Un vecteur normal à $(\mathcal{P})$ est $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \wedge \vec{n} = \vec{0} \\ H \in \mathcal{P} \end{cases}; \overrightarrow{AH} \wedge \vec{n} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-4 \\ z-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3y-2z+14 \\ 3x+z-7 \\ 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3y-2z+14=0 \\ 3x+z-7=0 \\ 2x-y=0 \\ x+2y-3z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{7} \\ y = \frac{20}{7} \\ z = -\frac{109}{7} \end{cases}$$

Bonne Réponse Aucune

9. Transformation

La matrice de notre transformation est $M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$; c'est la matrice d'une rotation $\Rightarrow$

Bonne Réponse C)

10. Sphère et plan

$$(\mathcal{P}): x + 2y - 3z - 1 = 0; B(0, 4, -3) \text{ et } S(B, 1)$$

Distance du centre de la sphère au plan : $d(B, \mathcal{P}) = \frac{|(1 \times 0 + 2 \times 4 - 3 \times -3 - 1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{16}{\sqrt{14}} > 1$ donc P et S ne se touchent pas.

Bonne Réponse C)11. Résolution de $(E): 24x + 34y = 2$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Une solution particulière de (E) est $(x_0, y_0) = (-7, 5)$

$$\begin{cases} 24x + 34y = 2 \\ 24(-7) + 34(5) = 2 \end{cases} \Rightarrow 24(x+7) + 34(y-5) = 0$$

$$\Rightarrow 24(x+7) + 34(y-5) = 0$$

$$\Rightarrow 12(x+7) = -17(y-5)$$

$$\Rightarrow 12/y - 5$$

$$\Rightarrow y = 12k + 5, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 12(x+7) = -17 \times 12k$$

$$\Rightarrow x = -17k - 7$$

$$\Rightarrow (x, y) = (-17k - 7; 12k + 5) = (17k - 7; 5 - 12k) \text{ car } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

Bonne Réponse D)

12. Forme polaire de $3x - 4y + 5 = 0$

Les coordonnées polaires d'un point $M(x, y)$ sont r et θ et se définissent par :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = x/r \\ \sin \theta = y/r \end{cases}$$

$$3x - 4y + 5 = 0 \Leftrightarrow 3r \cos \theta - 4r \sin \theta = -5$$

$$\Leftrightarrow 3r \cos \theta - 4r \sin \theta = -5$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}r \cos \theta + \frac{4}{5}r \sin \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}r \cos \theta + \frac{4}{5}r \sin \theta = 1$$

$$\Leftrightarrow r(\cos(127^\circ) \cdot \cos \theta + \sin(127^\circ) \cdot \sin \theta) = 1$$

$$\Leftrightarrow r \cos(\theta - 127^\circ) = 1$$

Bonne Réponse A)

13. Equation différentielle $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ avec $y=0$ quand $x=1$

Par vérifications successives des différentes propositions, on trouve

Bonne Réponse A)

14. Valeur de $\sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1}$

$$\sum_{i=1}^n a_1 r^{i-1} = a_1 \frac{r^{1-1} - r^{n-1+1}}{1-r} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

Bonne Réponse B)

15. Valeur de $\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Posons $u = \sqrt{x}$ on a :

$$\begin{cases} du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \\ x = \frac{\pi^2}{9} \Rightarrow u = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ x = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_{\frac{\pi^2}{9}}^{\frac{\pi^2}{4}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos u du = 2[\sin u]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Bonne Réponse D)

16. Expression $e^{(2-2i)\theta}$

$$e^{(2-2i)\theta} = e^{2\theta} e^{-2i\theta} = e^{2\theta} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$$

Bonne Réponse C)

17. Fonction $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x, & x \leq -1 \\ x^2 + bx, & -1 < x < 0 \\ x^2 + 2x + k, & x \geq 0 \end{cases}$

$f(x)$ est continue dans l'intervalle $[-2, 2]$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

Or

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 - b \end{cases} \Rightarrow b = 6$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = k \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

Bonne Réponse B)

18. Solution de l'équation vectorielle différentielle $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}$

On ramène cette équation à un système de trois équations sur les coordonnées x, y, z du vecteur $\vec{v}$:

$$\frac{dx}{dt} = x; \quad \frac{dy}{dt} = y; \quad \frac{dz}{dt} = z$$

et on obtient $x = a_1 e^t; y = a_2 e^t; z = a_3 e^t \Rightarrow \vec{v} = \vec{A} e^t$ où on a posé $\vec{A}(a_1, a_2, a_3)$

Bonne Réponse B)

19.

Bonne Réponse A)

20. (P) : $2x - y + z = 4$; (D) de vecteur directeur $\vec{r} = i + 2j - k + \lambda(i - j + k)$

Sinus de l'angle entre (P) et (D)

$\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan, l'angle α que nous recherchons vaut $\alpha = 90^\circ - \beta$ avec $\beta = (\vec{n}, \vec{r})$;
 $\sin \alpha = \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta$

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \|\vec{n}\| \cdot \|\vec{r}\| \cos \beta \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{r}\|} = \frac{4\lambda - 1}{\sqrt{18\lambda^2 - 24\lambda + 36}}$$

Bonne Réponse Aucune

PARTIE B

Q1. Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A, B et C d'affixe respectives $i, \sqrt{2}$ et $\sqrt{2} + i$. On appelle I, J et K les milieux respectifs des segments [OB] ; [AC] et [BC] et S la similitude directe qui transforme A en I et O en B.

i.

a. Rapport k et angle α de S.

$$\begin{cases} S(A) = I \\ S(O) = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IB = kAO \\ \arg(\vec{AO}, \vec{IB}) = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{|z_B - z_I|}{|z_O - z_A|} = \frac{|z_B - \frac{z_O + z_B}{2}|}{|z_O - z_A|} = \frac{|\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}|}{|0 - i|} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha = \arg \frac{z_B - z_I}{z_O - z_A} = \arg \frac{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{0 - i} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

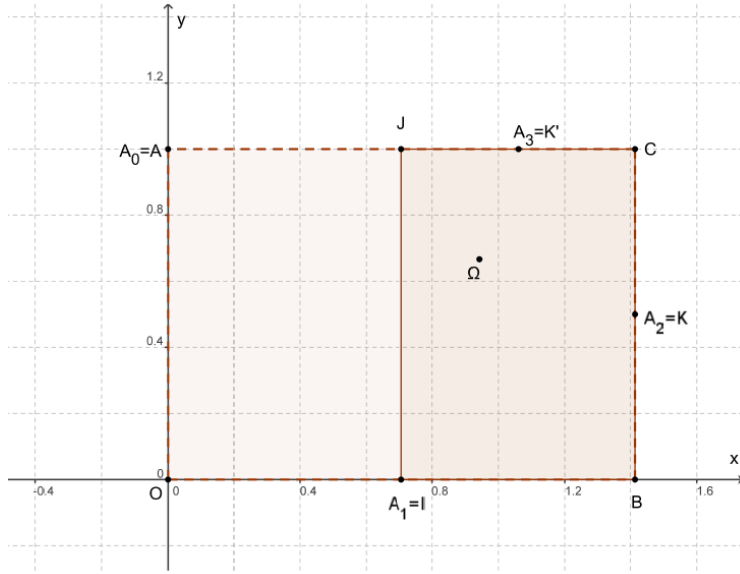
b. Ecriture complexe de S.

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ tels que $M' = S(M)$, on a $B = S(O) \Rightarrow$

$$z' - z_B = k e^{i\alpha} (z - z_O) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} (z - z_O) \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{2}}{2} iz + \sqrt{2}$$

c. Affixe ω du centre Ω de S.

Ω est invariant par S d'où $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} i\omega + \sqrt{2} \Leftrightarrow \omega = \frac{2\sqrt{2}+2i}{3}$



d. Image par S du rectangle A0BC

$S(A) = I$
 $S(O) = B$; déterminons $S(B)$ et $S(C)$

$$z'_B = \frac{\sqrt{2}}{2} i\sqrt{2} + \sqrt{2} = i + \sqrt{2} = z_C \Rightarrow S(B) = C$$

$$z'_C = \frac{\sqrt{2}}{2} i(i + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i = \frac{\sqrt{2} + 2i}{2} = \frac{z_A + z_C}{2} = z_J \Rightarrow S(C) = J$$

$$\text{Donc } S(A0BC) = IBCJ$$

ii.

a. Images des points O, B et A par S^2

$$S^2(O) = S(S(O)) = S(B) = C \Rightarrow S^2(O) = C$$

$$S^2(B) = S(S(B)) = S(C) = J \Rightarrow S^2(B) = J$$

$$S^2(A) = S(S(A)) = S(I) = I' \text{ avec } z_{I'} = \frac{\sqrt{2}}{2} i \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \frac{1}{2}i = \frac{2\sqrt{2}+i}{2} = \frac{z_B+z_C}{2} = z_K \Rightarrow$$

$$S^2(A) = K$$

b. Montrons que S^2 est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport

Pour cela, nous allons montrer que son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

$$\forall M(z), \text{ soit } M_1(z_1) = S^2(z), \text{ on a } z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} iz' + \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} iz + \sqrt{2} \right) + \sqrt{2} = -\frac{1}{2}z + i + \sqrt{2}$$

$$\text{D'où } S^2 \text{ est une homothétie son centre a pour affixe } \frac{b}{1-a} = \frac{i+\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}+2i}{3} = \omega \Rightarrow$$

$$S^2 \text{ est une homothétie de centre } \Omega(\omega) \text{ et de rapport } -\frac{1}{2}$$

c. Déduisons-en que les droites (OC) , (BJ) et (AK) sont concourantes

On a $S^2(O) = C$; $S^2(B) = J$; $S^2(A) = K$ donc Ω le centre de l'homothétie S^2 appartient aux droites (OC) , (BJ) et (AK) et elles sont par conséquent concourantes en Ω .

iii. On définit la suite de points A_n de la façon suivante : $A_0 = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = S(A_n)$

a. Représentation (Voir i-c))

b. Expression de $U_n = A_n A_{n+1}$ en fonction de U_{n-1}

$$U_n = A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} iz_n + \sqrt{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} iz_{n-1} + \sqrt{2} \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n - z_{n-1}| \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} U_{n-1}$$

$$\boxed{U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} U_{n-1}}$$

c. Expression de U_n en fonction de n

$$U_0 = A_0 A_1 = AI = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \boxed{U_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

U_n est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\forall n \geq 0$, $U_n = U_0 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \Rightarrow$

$$\boxed{U_n = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}$$

Q1. A/

On considère l'équation différentielle (E): $y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$

i) Montrons que la fonction h , définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est solution de (E).
 $h' - 2h = 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2(2xe^{2x} + 1) = 2e^{2x} - 2 = 2(e^{2x} - 1)$ donc h est solution de (E).

ii) On pose $y = z + h$ Montrons que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de $z' - 2z = 0$.

$$y \text{ solution de (E)} \Leftrightarrow (z + h)' - 2(z + h) = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow z' - 2z + h' - 2h = 2(e^{2x} - 1)$$

$$\Leftrightarrow z' - 2z = 0 \text{ car } h' - 2h = 2(e^{2x} - 1). \text{ D'où}$$

$$y \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow z \text{ est solution de } z' - 2z = 0.$$

Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E') : z' - 2z = 0$.

$$(E') \Leftrightarrow z = Ae^{2x}; A \in \mathbb{R}$$

Les solutions de (E) sont sous la forme $z + h$ soit

$$y = (A + 2x)e^{2x} + 1; A \in \mathbb{R}$$

iii) Démontrons qu'il existe une seule solution g de (E) s'annulant en 0.

Soit g une solution de (E) s'annulant en 0, on a : $g(0) = A + 1 = 0 \Rightarrow A = -1$ d'où $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$

g est bel et bien unique.

B/

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (2x - 1)e^{2x} + 1$.

1. Variations de g sur $\mathbb{R}$.

g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(x) = 2e^{2x} + (4x - 2)e^{2x} = 4xe^{2x}. g' \text{ s'annule en } 0 \text{ et on a } \begin{cases} g'(x) < 0 \text{ pour } x < 0 \\ g'(x) > 0 \text{ pour } x > 0 \end{cases} \text{ donc}$$

$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ est décroissante sur }]-\infty; 0] \\ \text{et croissante sur } [0; +\infty[\end{array} \right.$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	1	0	$+\infty$

d'après ce tableau,

g est positive sur $\mathbb{R}$

2.

a. Résolution dans $\mathbb{R}$ de $1 - g(x) \geq 0$

$$1 - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \leq 1 \Leftrightarrow (2x - 1)e^{2x} + 1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)e^{2x} + 1 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

$$S = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right]$$

b. Calcul de $I = \int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx$

$$g' - 2g = 2(e^{2x} - 1) \Rightarrow 1 - g = e^{2x} - \frac{g'}{2} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [1 - g(x)] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(e^{2x} - \frac{g'(x)}{2} \right) dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - \frac{g(x)}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{e-2}{2} \Rightarrow$$

$$I = \frac{e-2}{2}$$

c. Interprétation graphique de a. et b.

L'aire délimitée par C_g ; l'axe des abscisses ; l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ est égale à $\frac{e-2}{2}$

Q2. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; on considère les points $A(3,0,10)$; $B(0,0,15)$ et $C(0,20,0)$.

1.

a. Représentation paramétrique de la droite (AB)

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un point de l'espace $M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} = \vec{0} (\lambda \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z-10 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \\ 0 \\ 5\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$(AB) : \begin{cases} x = -3\lambda + 3 \\ y = 0 \\ z = 5\lambda + 10 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

b. Montrons que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en $E(9,0,0)$

Au point E où (AB) coupe l'axe des abscisses, on a $y = 0$; $z = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x = -3 \times -2 + 3 = 9$ donc $E(9,0,0)$.

c. Justifions que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

$y_C = 20 \neq 0$ donc d'après la représentation paramétrique, $C \notin (AB)$ et par conséquent A, B, et C ne sont pas alignés.

2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC

a. Justifions que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH)

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (BC) \perp (OE) \quad (1)$$

H étant le pied de la hauteur issue de O dans OBC, on a $(BC) \perp (OH) \quad (2)$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow (BC) \perp (OEH)$$

Déduisons-en que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC

$(BC) \perp (OEH) \Rightarrow (BC)$ est perpendiculaire à toute droite de (OEH) en particulier, $(EH) \perp (BC)$ de plus, $H \in (BC)$ donc (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC

b. Déterminons une équation cartésienne du plan (OEH).

Un point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'espace appartient à (OEH) si et seulement si $(OM) \perp (BC)$ or $(OM) \perp (BC) \Leftrightarrow$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ -15 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(OEH) : 4y - 3z = 0$$

c. Vérifions que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne $20x + 9y + 12z - 180 = 0$

$$\begin{cases} 20x_A + 9y_A + 12z_A - 180 = 20 \times 3 + 9 \times 0 + 12 \times 10 - 180 = 0 \\ 20x_B + 9y_B + 12z_B - 180 = 20 \times 0 + 9 \times 0 + 12 \times 15 - 180 = 0 \\ 20x_C + 9y_C + 12z_C - 180 = 20 \times 0 + 9 \times 20 + 12 \times 0 - 180 = 0 \end{cases}$$

Les points A, B, et C sont non alignés (et donc définissent un plan) et appartiennent au plan d'équation cartésienne $20x + 9y + 12z - 180 = 0$; or par trois points de l'espace, il passe un unique plan donc

$$(ABC) : 20x + 9y + 12z - 180 = 0$$

d. Montrons que le système : $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$ a une solution unique.

La résolution du système nous donne la solution unique $(x, y, z) = \left(0, \frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right)$

Cette solution représente l'intersection des plans (yOz) ; (OEH) ; (ABC) qui n'est autre que le point H

e. Calcul de la distance OH

$$OH = \|\overrightarrow{OH}\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{48}{5}\right)^2} = 12$$

- **Déduction de EH:** on a $H \in (yOz)$ et $E \in (Ox) \Rightarrow (OE) \perp (OH)$ donc le triangle OEH est rectangle en O et d'après le théorème de Pythagore, $EH = \sqrt{OE^2 + OH^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$
- **Aire du triangle EBC:** $\mathcal{A}(EBC) = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{BC \times EH}{2} = \frac{\sqrt{20^2 + 15^2} \times 15}{2} \Rightarrow$

$$\boxed{\mathcal{A}(EBC) = \frac{375}{2}}$$

on a $H \in (yOz)$ et $E \in (Ox) \Rightarrow (OE) \perp (OH)$ donc le triangle OEH est rectangle en O et d'après le théorème de Pythagore, $EH = \sqrt{OE^2 + OH^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$

3.

Notons tout d'abord que $(EBC) = (ABC)$

- $\mathcal{V}(OEBC) = \frac{\text{aire de base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\mathcal{A}(EBC) \times d(O, (EBC))}{3} = \frac{\mathcal{A}(EBC) \times d(O, (ABC))}{3} = \frac{125}{2} d(O, (ABC))$
- $\mathcal{V}(OEBC) = \frac{1}{6} \|\overrightarrow{OE} \cdot (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})\| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = 450$
- $d(O, (ABC)) = \frac{450}{\frac{125}{2}} = 7,2$

$$\boxed{d(O, (ABC)) = 7,2}$$

Q3. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n , par :

$$u_0 = 3 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}; \quad v_0 = 4 \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2}.$$

1. Calcul de u_1, v_1, u_2 et v_2

$u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{7}{2}$	$v_1 = \frac{u_1 + v_0}{2} = \frac{15}{4}$
$u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{29}{8}$	$v_2 = \frac{u_2 + v_1}{2} = \frac{59}{16}$

2. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = v_n - u_n$

a. **Montrons que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{v_{n+1} - u_{n+1}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}}{v_n - u_n} = \frac{\frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2}}{v_n - u_n} = \frac{1}{4}$$

Donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

b. **Expression de (w_n) en fonction de n :**

$$w_n = w_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ avec } w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 3 = 1$$

$$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\lim w_n = 0$$

3. Sens de variation de (u_n) et (v_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} = \frac{w_n}{2} > 0 \text{ donc } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} \quad (1)$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} = -\frac{w_n}{2} < 0 \text{ donc } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante} \quad (2)$$

$$\lim w_n = \lim(v_n - u_n) = 0 \quad (3)$$

(1); (2) et (3) $\Rightarrow$ les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

On peut en déduire que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite

4. On considère à présent la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$.

a. **Démontrons que la suite (t_n) est constante :**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = \frac{u_{n+1} + 2v_{n+1}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2 \frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3} = \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3} = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_n$$

Donc la suite (t_n) est constante.

b. **Dédution des limites de (u_n) et (v_n)**

- La suite (t_n) étant constante, on a $\lim t_n = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2 \times 4}{3} = \frac{11}{3}$
- Posons $l = \lim u_n = \lim v_n$, on a alors $\lim t_n = \frac{l + 2l}{3} = l$ d'où

$$\boxed{\lim u_n = \lim v_n = \frac{11}{3}}$$

Q4. A/

- i) Soit (C) la courbe d'équation paramétrique $\begin{cases} x = \cosh^2 t \\ y = \sinh t \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$

a. **Calcul de la longueur de la courbe (C)**

N.B.

- $\cosh t$ et $\sinh t$ désignent respectivement les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique d'expressions $\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

On a en particulier $(\cosh t)^2 = 1 + (\sinh t)^2$ et $(\sinh t)' = \cosh t$

- Soit la courbe représentative C_f d'une fonction $f(x)$, sa longueur entre a et b vaut

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

- Soit une courbe C_f de représentation paramétrique $\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases} \quad a \leq t \leq b$, sa longueur vaut :

$$\mathcal{L} = \int_a^b \sqrt{(f_1'(t))^2 + (f_2'(t))^2} dt$$

- ii) Valeur moyenne de $\ln x$ dans l'intervalle $1 \leq x \leq e$

$$\mu = \frac{1}{e-1} \int_1^e \ln x dx = \frac{1}{e-1} [x \ln x - x]_1^e = \frac{1}{e-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{e-1}}$$

B/ Soit $I_n = \int_1^2 x(\ln x)^n dx$

- Montrons que pour $n \geq 1$, $2I_n + nI_{n-1} = 4(\ln 2)^n$.

Nous utilisons l'intégration par parties pour calculer $I_n, n \geq 1$

$$\text{Posons } \begin{cases} u' = x \text{ et } v = (\ln x)^n, \text{ on a} \\ u = \frac{x^2}{2} \text{ et } v' = \frac{n}{x} (\ln x)^{n-1} \Rightarrow \end{cases}$$

$$\int_1^2 x(\ln x)^n dx = \left[\frac{x^2}{2} (\ln x)^n \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} nx(\ln x)^{n-1} dx \Rightarrow$$

$$I_n = \left[\frac{2^2}{2} (\ln 2)^n \right] - \frac{1}{2} nI_{n-1} \Rightarrow$$

$$\boxed{2I_n + nI_{n-1} = 4(\ln 2)^n}$$

- Calcul de I_3 .

On a $I_3 = \int_1^2 x(\ln x)^3 dx$; d'après ce qui précède, $\forall n \geq 1, I_n = 2(\ln 2)^n - \frac{1}{2}nI_{n-1} \Rightarrow$

$$I_3 = 2(\ln 2)^3 - \frac{1}{2} \times 3 \left(2(\ln 2)^2 - \frac{1}{2} \times 2 \left(2(\ln 2)^1 - \frac{1}{2} \times 1I_0 \right) \right)$$

Or $I_0 = \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow$

$$I_3 = 2(\ln 2)^3 - 3(\ln 2)^2 + 3(\ln 2) - \frac{9}{8}$$

Q5.

i) Ensemble des nombres complexes z définies par $|z + 1| + |z - 1| = 3$

Soit dans le plan complexe les points $F'(-1)$ et $F(1)$; un point M appartenant à l'ensemble recherché vérifie $MF + MF' = 3$ donc l'ensemble recherché est l'ellipse de caractéristiques :

- Foyers F' et F ;

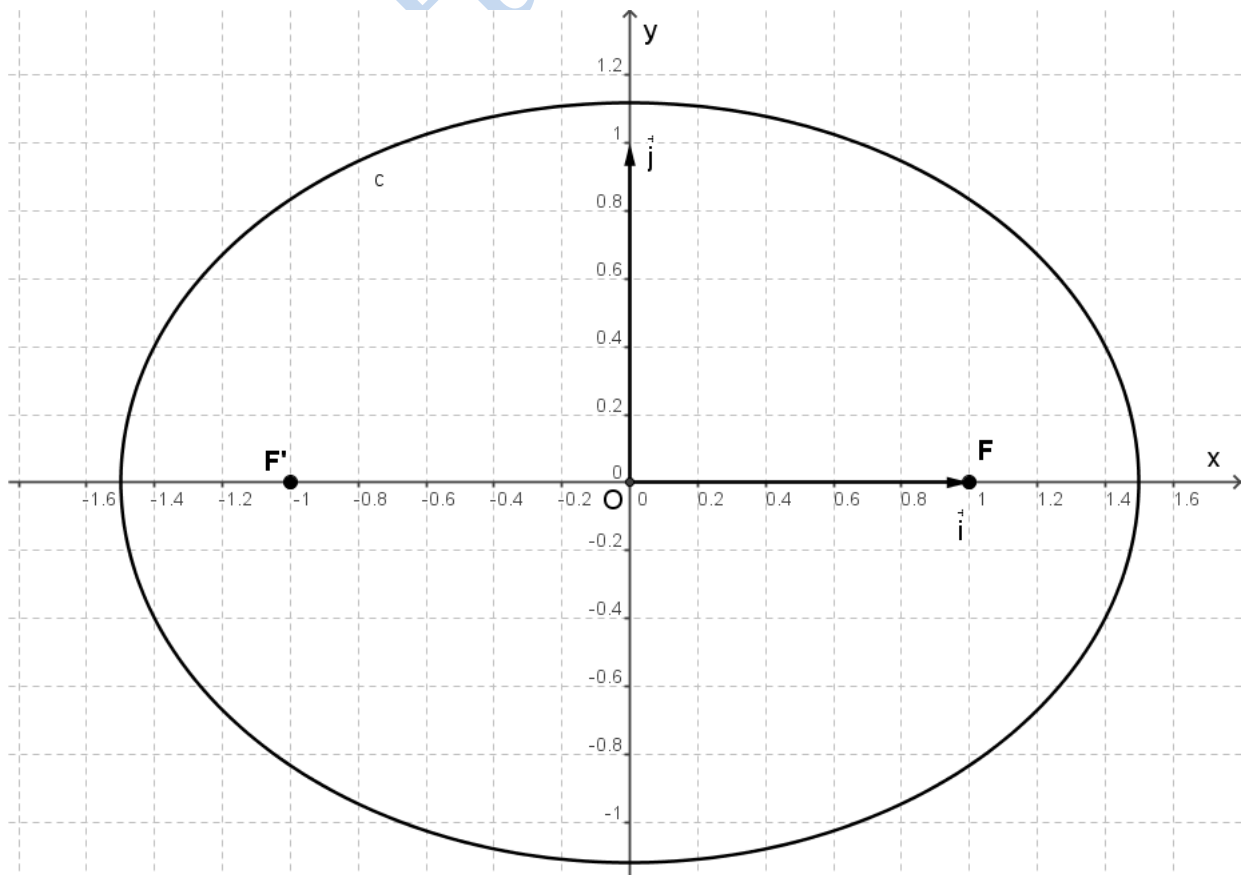
- Centre O (milieu de $[FF']$) ;

- $FF' = 2c \Rightarrow c = 1$; $MF + MF' = 2a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$;

les foyers appartiennent à l'axe réel donc $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

- Equation : $\frac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 1$

- Représentation :



ii) Calcul pour $z \neq 1$ de $\sum_{r=0}^n z^r$, $n > 0$

Somme des termes d'une suite géométrique :

$$\boxed{\sum_{r=0}^n z^r = \frac{z^0 - z^{n+1}}{1 - z} = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}}$$

iii) Soit $z = \frac{1}{2}(\cos \theta + i \sin \theta)$; montrons que $\sum_{r=0}^{\infty} z^r = \frac{2(2 - \cos \theta) + 2i \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}$

La forme polaire de z est $z = \frac{1}{2}e^{i\theta} \Rightarrow$

$$\sum_{r=0}^n z^r = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}e^{i(n+1)\theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=0}^n z^r &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}} = \frac{2}{2 - \cos \theta + i \sin \theta} = \frac{2(2 - \cos \theta - i \sin \theta)}{(2 - \cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{2(2 - \cos \theta) + 2i \sin \theta}{4 - 4 \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2(2 - \cos \theta) + 2i \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta} \end{aligned}$$

$$\text{or } \sum_{r=0}^{\infty} z^r = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{r=0}^n z^r \Rightarrow$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} z^r = \frac{2(2 - \cos \theta) + 2i \sin \theta}{5 - 4 \cos \theta}$$

iv)

a. Foyer de la lentille parabolique

$$y^2 = 20x = 2 \times 10x \Rightarrow F(5, 0)$$

b. Foyers de la lentille hyperbolique

c. Equation cartésienne de l'hyperbole

Q6. A/

Exprimons $\vec{r}$ en fonction de t , tel que quand $t = 0$, $\vec{r} = 0$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}$

L'équation caractéristique de l'équation différentielle vérifiée par $\vec{r}$ est

$r^2 + 3nr + 2n = 0$; $\Delta = 9n^2 - 8n^2 = n^2$ donc l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 = \frac{-3n+n}{2} = -n$ et $r_2 = \frac{-3n-n}{2} = -2n$ les solutions de l'équation différentielle sont de la forme

$$\vec{r} = \vec{A}e^{-nt} + \vec{B}e^{-2nt}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = -n\vec{A}e^{-nt} - 2n\vec{B}e^{-2nt}$$

Quand $t = 0, \vec{r} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$ et $\frac{d\vec{r}}{dt} = -n\vec{A} - 2n\vec{B} = \vec{a} \Rightarrow \vec{A} = \frac{1}{n}\vec{a}$ et $\vec{B} = -\frac{1}{n}\vec{a}$ d'où

$$\vec{r} = \frac{e^{-nt} - e^{-2nt}}{n} \vec{a}$$

B\

- **Equations paramétriques du mouvement**

$$\begin{cases} x = (V_i \cos 60^\circ)t = 25t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + (V_i \sin 60^\circ)t = -5t^2 + 25\sqrt{3}t \end{cases}$$

- **Instant où l'objet touche le sol.**

Il correspond à $y = 0$ et $t \neq 0 \Rightarrow -5t^2 + 25\sqrt{3}t = 0$

$$\Rightarrow -5t + 25\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{t_s = 5\sqrt{3} \text{ s}}$$

- **Distance parcourue par le projectile**

$$\boxed{d = x = 125\sqrt{3} \text{ m}}$$

- **Hauteur maximale**

Elle correspond à l'annulation de V_y

$$V_y(t) = -10t + 25\sqrt{3}; V_y(t) = 0 \Rightarrow t = 2,5\sqrt{3} \text{ s} \Rightarrow y = -5(2,5\sqrt{3})^2 + 25\sqrt{3}(2,5\sqrt{3}) = 97,75 \text{ m}$$

$$\boxed{h_{\max} = 97,75 \text{ m}}$$

Instant où elle est atteinte

$$\boxed{t = 2,5\sqrt{3} \text{ s}}$$

La position à un instant t a pour coordonnées

$$\begin{aligned} x &= (V_i \cos 60^\circ)t = 25t \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + (V_i \sin 60^\circ)t = -5t^2 + 25\sqrt{3}t \Rightarrow \end{aligned}$$

$\vec{OM} = (V_i \cos 60^\circ)\vec{i} + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + (V_i \sin 60^\circ)t\right)\vec{j}$ $\vec{OM}$ s'écrit donc comme la somme de deux vecteurs dont l'un $((V_i \cos 60^\circ)\vec{i})$ ne dépend que de la vitesse initiale et l'autre $\left(\left(-\frac{1}{2}gt^2 + (V_i \sin 60^\circ)t\right)\vec{j}\right)$ de la gravité.